

1 「我輩は猫である」について

「我輩は猫である」は夏目漱石の代表作であり、苦沙味先生とその知り合いたちとのへんてこな会話が主な内容となっている。とくにストーリーらしいものはない。この作品の一場面に寒月なる人物が首吊りの物理学を論じるシーンがある(岩波文庫 p95 から)。なぜいきなり物理の話が出てくるのか混乱した方もいるであろう。

これはホフトンという学者の表した「ON HANGING A MECHANICAL AND PHYSIOLOGICAL POINT OF VIEW」なる 1866 年の論文を一部訳したものであり、それは 1:首吊りの歴史,2:ホメロスの作品中で 12 人の侍女が吊るされる話の紹介,3:12 人の侍女の首の吊るされ方の考察,4:首吊りの生理学的考察,5:首吊りで即死させる方法の考案というように構成されている。そこで今回は「我輩は猫である」のこの一場面に注目し、その元ネタとなった論文の特に面白い(と書いて他の記述はあまり理解できなかった)3 番目と 5 番目の考察を紹介する。

2 12 人の侍女の首の吊るされ方の考察

12 人の侍女を吊るす方法は以下の 2 通り考えられる。

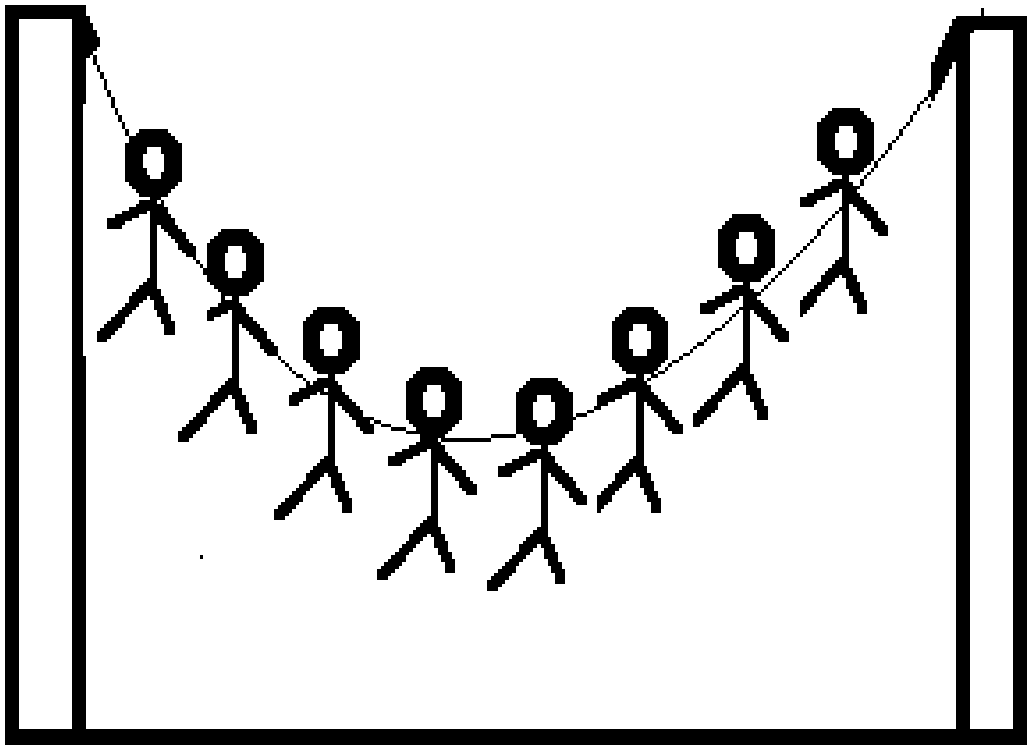


図 1: 方法 1(人数は正確ではない)

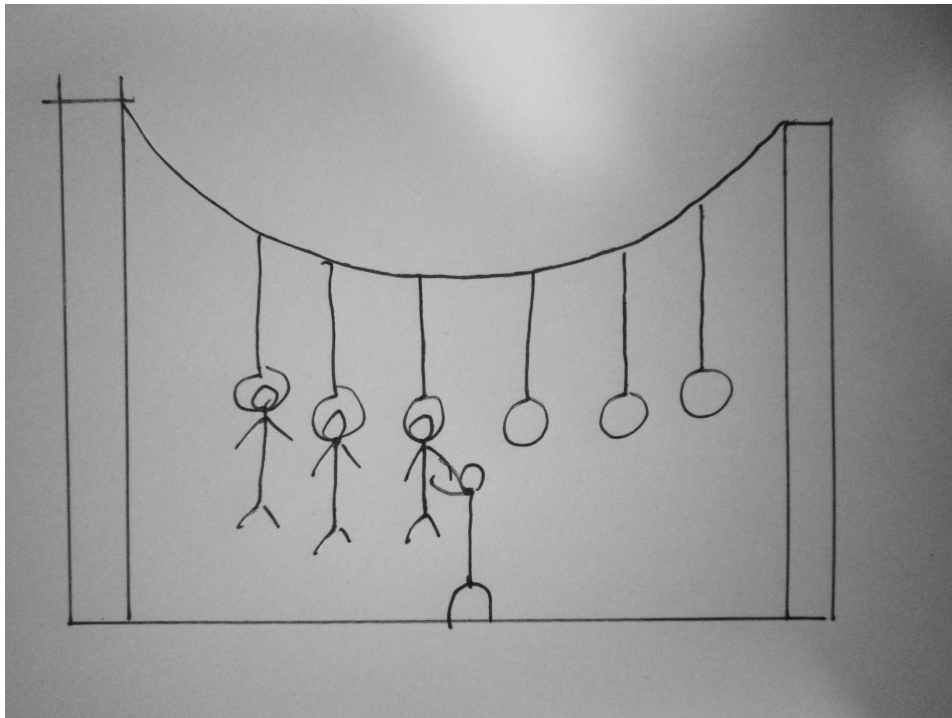


図 2: 方法 2(人数は正確ではない)

実は力学的考察によって方法 1 は実現困難であることが分かる. 簡単のため 12 人は左右対称に吊るされており, 右半分だけを考察するだけで十分なものとする. 図のように角度 $\alpha_i, i = 1 \sim 6$, 張力 $T_i, i = 1 \sim 6, X$ とおく.

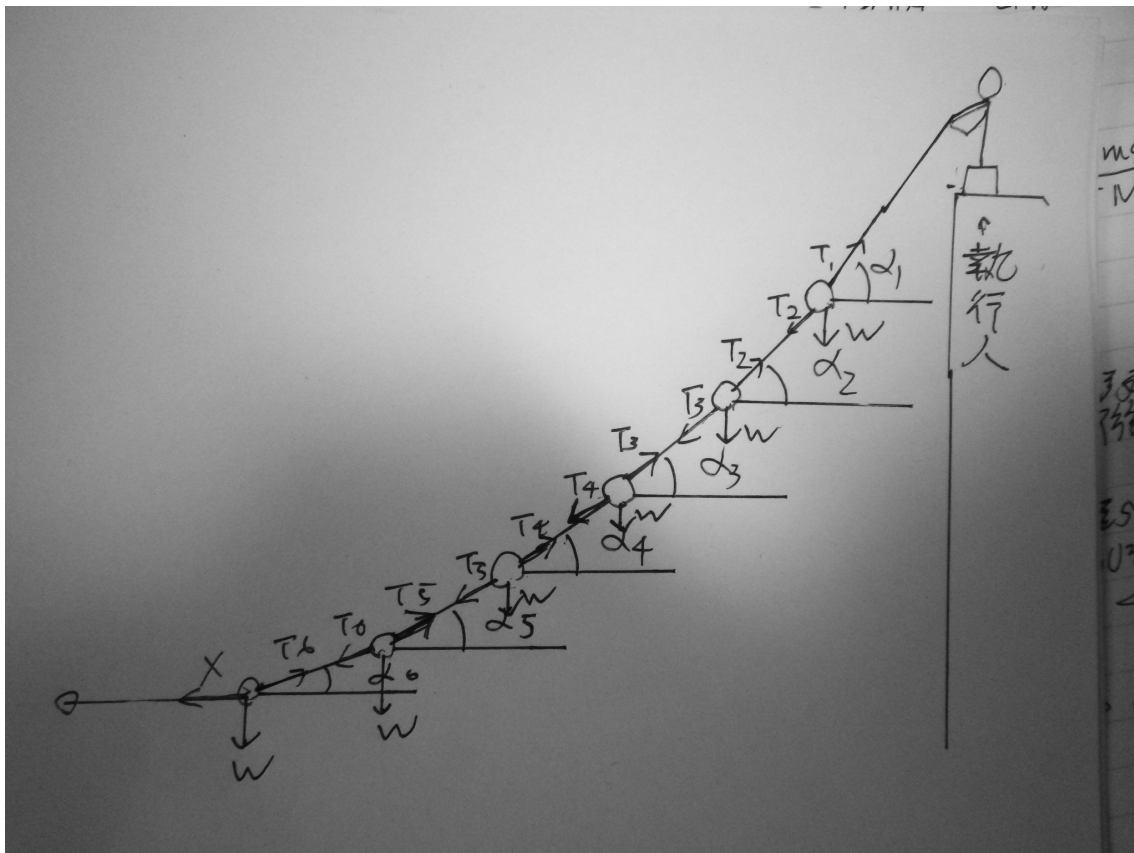


図 3: 各パラメータの設定

なおロープの為す図形の底辺は水平になっているとし, X はロープが水平となっている部分の張力である. 侍女の重さは共通の W とする. 各侍女の首の部分について釣り合いの式を立てると

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 \quad (1)$$

$$T_2 \cos \alpha_2 = T_3 \cos \alpha_3 \quad (2)$$

$$T_3 \cos \alpha_3 = T_4 \cos \alpha_4 \quad (3)$$

$$T_4 \cos \alpha_4 = T_5 \cos \alpha_5 \quad (4)$$

$$T_5 \cos \alpha_5 = T_6 \cos \alpha_6 \quad (5)$$

$$T_6 \cos \alpha_6 = X \quad (6)$$

$$T_1 \sin \alpha_1 = T_2 \sin \alpha_2 + W \quad (7)$$

$$T_2 \sin \alpha_2 = T_3 \sin \alpha_3 + W \quad (8)$$

$$T_3 \sin \alpha_3 = T_4 \sin \alpha_3 + W \quad (9)$$

$$T_4 \sin \alpha_4 = T_5 \sin \alpha_3 + W \quad (10)$$

$$T_5 \sin \alpha_5 = T_6 \sin \alpha_3 + W \quad (11)$$

$$T_6 \sin \alpha_6 = W \quad (12)$$

式 (1) から (6) より

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = \dots = T_6 \cos \alpha_6 = W \quad (13)$$

となる。一方式 (7) から (10) を辺辺足して

$$T_1 \sin \alpha_1 = 6W \quad (14)$$

を得る。処刑人の必要とする力は T_1 に等しいのでこの力を求めてみる。式 (13)(14) より $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を利用して

$$T_1^2 = (6W)^2 + X^2 \quad (15)$$

を得るので力 T_1 は

$$T_1 = \sqrt{(6W)^2 + X^2} \quad (16)$$

となる。張力 X は 0 より大きく、従って処刑人は侍女 6 人分の重さ以上の力を出さなければならないことが分かる。滑車やアシスタントの手を借りなければ到底実行できないだろうが、ホメロスのこの作品にそういった記述はないとのことである。だから方法 1 はありえないだろう。

3 首吊りで即死させる方法の考案

「我輩は猫である」の作中では方程式 (2) までしか言及されなかったが、元ネタであるホフトンの論文はまだまだ続く。そこで論文の最後の考察である首吊りにより人を即死に至らしめるための条件をここに紹介する。

まず人を首吊りで即死させるには瞬間的に罪人の脊髄を骨折させる必要がある。そこでホフトンはどういうわけか罪人の質量 (kg) と落下距離 (m) が

$$\text{罪人の質量} \times \text{落下距離} = 309.7 \text{kg} \cdot \text{m} \quad (17)$$

とすれば即死するだろうと提案した。現代流に言うとは脊髄を瞬間的に骨折させるには罪人の質量を m , 落下距離を H として

$$\Delta_{\text{破壊}} = mgH = 309.7kg \cdot m \times g = 3035J \quad (18)$$

だけのエネルギーが必要だということである。

罪人の刑が執行され、首吊り状態になる直前と直後の様子を考える。首吊りを罪人の質量とおなじ質量である質点と、ロープの質量と同じ質量である質点との弾性衝突と捉える。罪人、ロープの質量をそれぞれ m, m' とし、衝突前の速度をそれぞれ v, v' とし、衝突後の速度をそれぞれ u, u' とする。反発係数はロープの弾性を反映させたものと見る。運動量保存則と反発係数の定義から

$$mv + m'v' = mu + m'u' \quad (19)$$

$$e = -\frac{u - u'}{v - v'} \quad (20)$$

となり、これを解くと

$$u = \frac{mv + m'v' - em'(v - v')}{m + m'} \quad (21)$$

$$u' = \frac{mv + m'v' - em(v' - v)}{m + m'} \quad (22)$$

を得る。また失われたエネルギーは

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}m'u'^2 \quad (23)$$

となり、 u, u' を代入すれば

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{mm'}{m + m'} (1 - e^2)(v - v')^2 \quad (24)$$

を得る。ロープの重さを P , 罪人の重さを Q , 重力加速度を g とすると $P = m'g, Q = mg$ なので

$$\Delta E = \frac{1}{2g} \frac{PQ}{P + Q} (1 - e^2)(v - v')^2$$

と変形できる。ロープは衝突前にはたらず静止していると ($v' = 0$) とすると上式は

$$\Delta E = \frac{1}{2g} \frac{PQ}{P + Q} (1 - e^2)v^2$$

となり、落下距離を h とすれば初等力学の公式より $v^2 = 2gh$ が成立するから

$$\Delta E = \frac{PQ}{P + Q} (1 - e^2)h$$

と変形できる。またロープの弾性は小さい (バネのようにではない) から e は小さな値となるであろうし、ましてや e^2 はほとんど無視できるであろう。よって上式は

$$\Delta E = \frac{PQ}{P + Q} h \quad (25)$$

となる。 ΔE が丁度脊髄を瞬間的に骨折させるだけのエネルギー $\Delta_{\text{破壊}}$ に相当させると

$$3035N = \frac{PQ}{P + Q} h$$

となるので Q として

$$Q = \frac{3035N \times P}{Ph - 3035N} = \frac{3035N \times mg}{mgh - 3035N}$$

を得る。

ここでこの式を観察すると、 h が丁度 $mgh = 3035N$ を満たす、つまり丁度即死に至らしめる落下距離=ロープの長さである場合、ロープの重さは無限大になるべきであることが分かる。即ち、ロープの重さが罪人の重さに比べて極端に大きくなければならない。また h がその2倍の長さの場合、 $mgh = 2 \times 3035N$ となるから $P = Q$, つまりロープの重さは罪人の重さと等しくなければならないことが分かる。

4 若干の注意

ホフツンの論文は古いので現代の物理の作法, 概念と異なる点がいづらかあった. よってそれらを現在の高校の物理の教科書に出てくる用語, 概念に勝手に書き直した.

5 調べてみた感想

高校で習う質点の弾性衝突がこのような問題の考察に用いることができることは自分にとって意外であった. 単純な問題だからといって侮ってはいけないということだろう.